Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки
ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений»

ФИПИ

И.В. Ященко, А.В. Семенов, И.Р. Высоцкий

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2020 года

по **МАТЕМАТИКЕ**

Москва, 2020

Единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике представляет собой форму государственной итоговой аттестации, проводимой в целях определения соответствия результатов освоения обучающимися основных образовательных программ среднего общего образования по математике требованиям федерального государственного образовательного стандарта. Для указанных целей используются контрольные измерительные материалы (КИМ), представляющие собой комплексы заданий стандартизированной формы.

С 2015 г. ЕГЭ по математике проводится на двух уровнях: базовом и профильном. ЕГЭ базового уровня предназначен для проверки достижения участниками экзамена основных предметных результатов, в частности способности производить бытовые расчеты и использовать математические знания для решения задач, возникающих в повседневной жизни. ЕГЭ профильного уровня предназначен для проверки освоения более широкого круга математических понятий и методов, необходимых для продолжения математического образования. В связи с эпидемиологической ситуацией в России в 2020 г. ЕГЭ базового уровня по математике не проводился.

Варианты КИМ составляются на основе спецификации и кодификаторов проверяемых элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений.

Каждый вариант ЕГЭ 2020 г. по математике профильного уровня сохранил преемственность с экзаменационной моделью прошлого года в тематике, примерном содержании и уровнях сложности заданий. Вариант содержал 12 заданий с кратким ответом и 7 заданий с развернутым ответом. Задания относились к основным разделам курса математики: числа и вычисления, алгебра и начала математического анализа, геометрия, теория вероятностей. Проверка логических навыков была включена в большинство заданий и особенно проявлялась в требованиях к решению заданий с развернутым ответом.

Вариант экзаменационных материалов по математике профильного уровня состоит из 19 заданий, сгруппированных в две части. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня, часть 2 содержит 11 заданий повышенного и высокого уровней сложности. Первые 12 заданий подразумевают краткий числовой ответ и оцениваются в 0 или 1 балл. Задания 13 – 19 политомические с развернутым ответом. В большинстве политомических заданий требования на промежуточные баллы определяются однозначно за счет разбиения задания на законченные по смыслу пункты.

Модель ЕГЭ по математике профильного уровня, сформировавшаяся к настоящему времени, способна выделить наиболее подготовленных участников, обладающих потенциалом для продолжения образования по техническим и математическим специальностям. В то же время экзамен содержит достаточный материал для диагностики общих математических знаний и умений, используемых при изучении иных предметов, в быту и в массовых профессиях. В большинстве своем эти задания сгруппированы в части 1 и охватывают широкий круг математических объектов, методов и практических сюжетов: оптимальный выбор, задачи, проверяющие уровень финансовой грамотности, задачи на бытовые расчеты и оперирование процентами, прикладная геометрия, оценка вероятностей событий в простых ситуациях и т.п.

В последние годы среди выпускников растет понимание роли и назначения двухуровневого экзамена по математике и выпускники с помощью учителей в основном осознанно выбирают базовый или профильный уровень. Поэтому в перспективной модели КИМ ЕГЭ планируется сократить количество заданий базового уровня сложности, заменив их заданиями с кратким ответом, ориентированными на прикладное использование математики в смежных предметах, а также заданиями, недостаточно представленными в ЕГЭ до сих пор.

Задания части 2, как дихотомические, так и политомические, предназначены для проверки математических знаний, необходимых абитуриентам технических и математических специальностей. Традиционно во вторую часть входят задачи на исследование функций, задачи по стереометрии и планиметрии, уравнения и неравенства.

При анализе результатов профильного экзамена в 2020 г. следует учитывать влияние следующих факторов:

– массовый переход школ на дистанционное обучение в конце учебного года;

– отмену в 2020 г. обязательного экзамена по математике;

– автоматическое зачисление без ЕГЭ победителей и призеров заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников;

– психологическое напряжение участников экзамена в связи с карантинными мерами.

Эти обстоятельства не могли не сказаться на результатах экзамена. При этом результаты в целом несколько ниже прошлогодних, но существенно выше результатов 2018 г.

На рисунке представлены распределения первичного балла ЕГЭ в 2018–2020 гг.

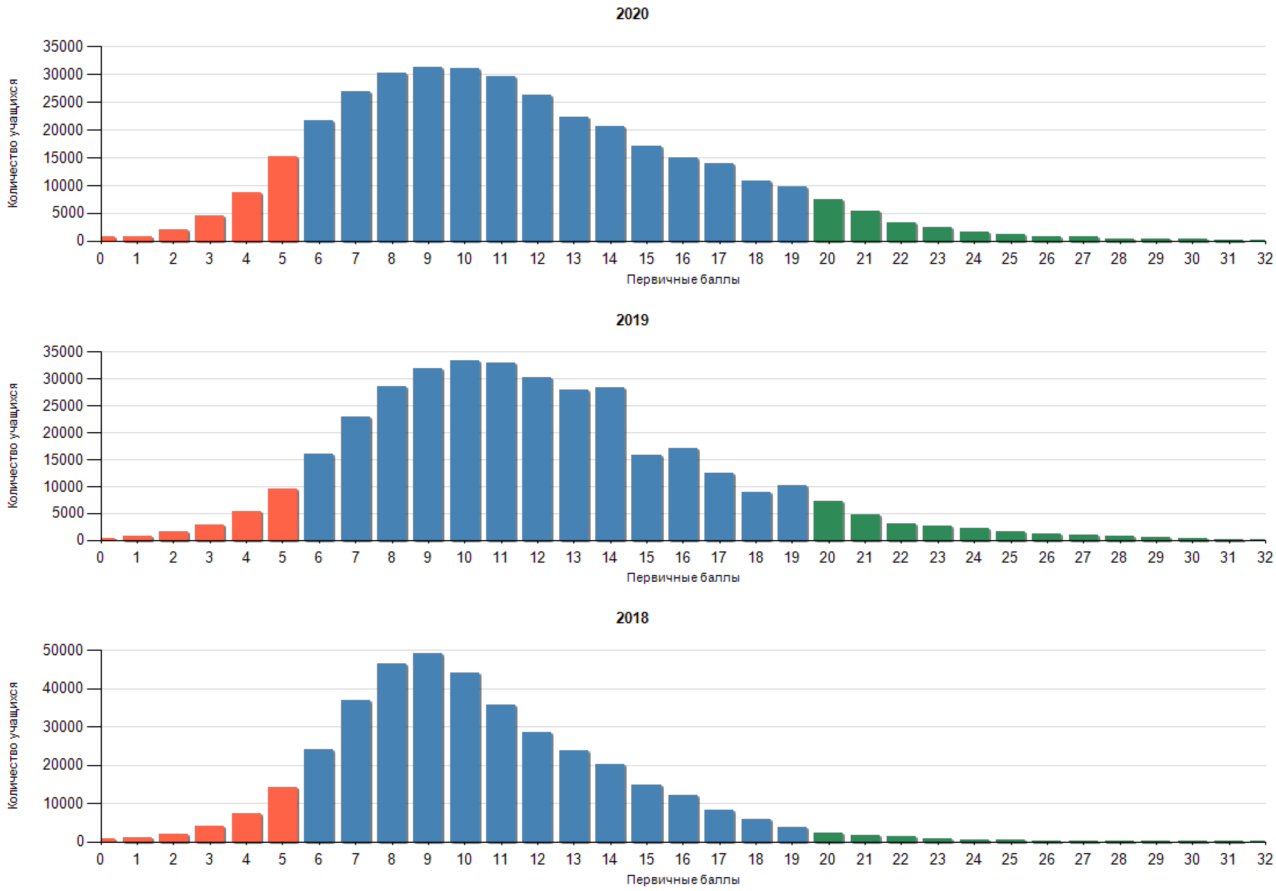


Рисунок. Распределение первичных баллов ЕГЭ в 2018–2020 гг.

Характер распределения результатов 2020 г. практически не изменился по сравнению с 2019 г. Распределение несколько сгладилось на участке высоких баллов в связи с несущественным ростом доли неполных баллов за выполнение заданий части 2 КИМ (в 2019 г. большая часть бравшихся за решение задач части 2 доводила их решение до конца). Аномалии в распределении отсутствуют.

В таблице 1 приведены данные о среднем тестовом балле и распределении участников по диапазонам тестового балла в 2018–2020 гг.

Таблица 1

Год	Средний тестовый балл	Диапазон тестовых баллов				
		0–20	**21–40**	**41–60**	**61–80**	**81–100**
2020	53,94	4,62%	25,91%	25,38%	37,48%	6,60%
2019	55,91	3,84%	21,57%	26,61%	40,91%	7,08%
2018	49,26	4,78%	31,39%	32,36%	29,31%	2,16%

Средний тестовый балл в 2020 г. снизился на 2 в сравнении с аналогичным показателем 2019 г., но при этом остался существенно выше среднего балла 2018 г. Доля участников экзамена с результатами от 0 до 40 тестовых баллов выросла по сравнению с 2019 г., но осталась заметно ниже соответствующей доли участников ЕГЭ 2018 г., а доля участников с результатами в диапазоне от 41 до 100 тестовых баллов несколько уменьшилась по сравнению с 2019 г., но осталась выше соответствующей доли участников ЕГЭ 2018 г.

Как и в предыдущие годы, минимальный первичный балл, необходимый для того, чтобы выдержать экзамен на минимальном уровне, был равен 6 первичным (27 тестовым) баллам. В 2020 г. не преодолели минимальной границы 8,8% участников экзамена (в 2019 г. – 6,7% участников; в 2018 г. – 8,6%).

Число и доля участников, набравших 100 баллов в 2020 г., несколько сократились в сравнении с аналогичными показателями 2019 г., но остались существенно выше соответствующего показателя 2018 г. Это объясняется тем, что на фоне общего роста качества математической подготовки школьников значительное число выпускников, имеющих право поступления на специальности «математика», «информатика», «физика», «экономика» и др. без вступительных испытаний, в этом году отказались от сдачи экзамена по математике. Это явление наиболее заметно в регионах, лидирующих по количеству дипломов заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников. При этом в других регионах наблюдается рост числа 100-балльников и высокобалльников, что, вероятно, связано с эффективностью самоподготовки высокомотивированных участников экзамена.

В 2020 г. наблюдаются разнонаправленные отклонения доли выполнения заданий в отдельных линиях от результатов прошлого года. Несмотря на негативные факторы, сопутствующие подготовке к экзамену в 2020 г., отмечается заметный рост процента выполнения наиболее сложных заданий 17 и 19. Этот феномен также можно объяснить массовым переходом наиболее подготовленных категорий школьников на самостоятельную подготовку к экзамену.

Несмотря на факторы, негативно сказавшиеся на качестве подготовки к ЕГЭ в абсолютном большинстве школ, отмечен рост логической и алгоритмической культуры участников экзамена. Это выразилось в заметном снижении доли полученных неполных баллов в ряде политомических заданий: участники экзамена, которые нашли способ решения задачи, давали ее полное верное решение значительно чаще, чем это было в прошлые годы.

На результаты ЕГЭ с каждым годом все больше влияют меры по реализации Концепции развития математического образования. В частности, в ряде регионов в 2020 г. по сравнению с предыдущими годами выпущено больше школьников, которые начали углубленное изучение математики с 7 – 8 классов; сказывается работа образовательного центра «Сириус» по развитию творческих способностей обучающихся в регионах (проводится обучение свыше 3000 школьников в год в очной форме, свыше 10 000 в среде «Сириус-онлайн»), реализация в регионах системы мер по выявлению и развитию математического таланта школьников, работа общедоступных интернет-ресурсов, направленных на развитие творческих способностей школьников.

По результатам детального анализа типичных ошибок участников ЕГЭ прошлых лет и методических рекомендаций ФИПИ создано много печатных и электронных учебных материалов, предназначенных для подготовки обучающихся к профильному ЕГЭ по математике;растет доля пособий, рассчитанных на самоподготовку школьников; в ряде регионов приняты региональные программы развития математического образования; проект «Я сдам

ЕГЭ», стартовавший три года назад, привел к существенному росту результатов участвующих в этом проекте регионов, поскольку он построен не на решении вариантов прошлых лет, а на системном изучении математики, ориентированном на индивидуальную траекторию развития каждого школьника.

Рост общественного запроса на качественное математическое образование и повышение роли математической грамотности как общественно значимого фактора проявились в повышении востребованности ресурсов для самостоятельного дополнительного математического образования. В наиболее популярных диагностических системах в 2019/20 учебном году зарегистрировались и выполняли тренировочные работы более 80% участников ЕГЭ профильного уровня 2020 г. Это явилось одной из причин снижения доли вычислительных ошибок при выполнении заданий с кратким ответом.

Следует отметить позитивное влияние действующей экзаменационной модели ОГЭ на результаты ЕГЭ: включение несколько лет назад в КИМ ОГЭ практико-ориентированных заданий позволило выстроить единую систему требований в оценке качества математического образования. Включение в ОГЭ блока заданий по геометрии в качестве обязательного для преодоления аттестационного порога по прошествии нескольких лет положительно сказалось на уровне выполнения заданий по геометрии в ЕГЭ.

Перейдем к содержательному анализу выполнения отдельных заданий КИМ.

Алгебра и начала математического анализа, базовый уровень сложности

Задания 1, 2, 4, 5 относятся к заданиям базового уровня и выполняются большинством участников экзамена. Уровень выполнения задания 7 базового уровня ниже, чем уровень выполнения заданий 1, 2, 4, 5. Рассмотрим типичные примеры заданий и прокомментируем результаты их выполнения.

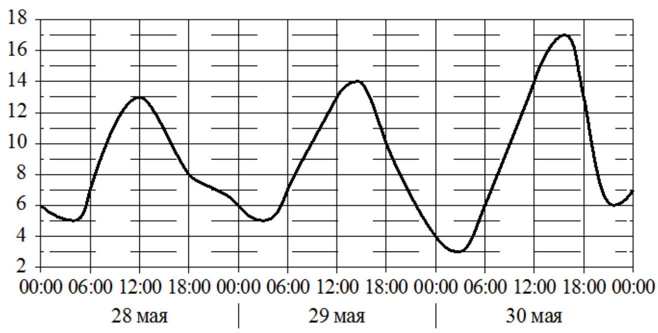
Задание 1.
В доме, в котором живёт Гриша, один подъезд. На каждом этаже находится по пять квартир. Гриша живёт в квартире 43. На каком этаже живёт Гриша?

Задание проверяет сформированность умения использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.

Задание выполняется на уровне 87,5/97,9%[1].

Для выполнения этого задания выпускник должен уметь выполнять арифметические действия с целыми числами. Проблемы у участников возникают на стадии интерпретации полученных результатов.

Задание 2.
На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наибольшую температуру воздуха 29 мая. Ответ дайте в градусах Цельсия.



[1] Здесь и далее: первое число – участниками ЕГЭ, не преодолевшими минимального балла; второе число – процент выполнения высокобалльниками.

Задание проверяет сформированность умения анализировать диаграммы и графики.

Оно выполняется на уровне 99,1/99,9%.

Для выполнения этого задания выпускник должен найти на заданном интервале наибольшее значение представленной графически величины. Проблемы у участников возникают в основном из-за невнимательного чтения условия задачи.

Задание 4.

В чемпионате по гимнастике участвуют 50 спортсменок: 13 из Великобритании, 7 из Франции, остальные — из Германии. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Германии.

Задание проверяет сформированность понятия «вероятность» и умения находить вероятность в простых ситуациях.

Задание выполняется на уровне 88,8/99,6%.

Проблемы у участников возникают из-за недостаточной сформированности понятия «вероятность события».

Задание 5.

Найдите корень уравнения $\sqrt{36-4x}=2$.

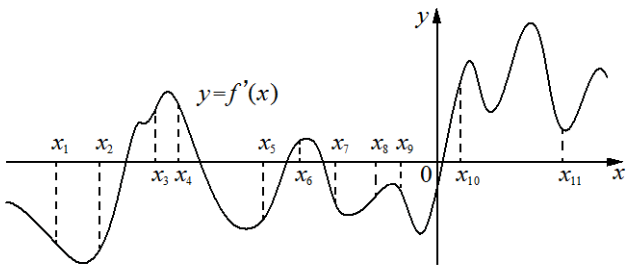
Задание сводится к решению линейного уравнения и проверяет сформированность умения решать уравнение с переменной под знаком квадратного корня, а также знание определения арифметического квадратного корня.

Задание выполняется на уровне 84,7/99,7%.

Проблемы у участников чаще всего возникают при выполнении арифметических действий.

Задание 7.

На рисунке изображён график $y=f'(x)$ *— производной функции* $f(x)$*. На оси абсцисс отмечено одиннадцать точек:* x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}*. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам убывания функции* $f(x)$*?*



Задание проверяет знание связи между характером монотонности функции и знаком ее производной, умение по графику производной функции охарактеризовать свойства самой функции.

Задание выполняется на уровне 23,9/94,7%.

Проблемы у участников возникают в основном из-за незнания свойств производной, ошибки при интерпретации условия, вызванной отсутствием навыков функционального чтения.

Характеризуя группу заданий 1–8 в целом, можно отметить, что отсутствуют существенные отличия между результатами выполнения этих заданий участниками слабой и сильной групп.

Алгебра и начала математического анализа, повышенный уровень сложности

Задания 9–12, 13, 15, 17 относятся к заданиям повышенного уровня и участниками экзамена со слабой подготовкой (группа I) выполняются значительно хуже заданий части 1.

Задание 9.

Найдите $\sin\alpha$*, если* $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$ *и* $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Задание проверяет сформированность умения по заданному значению одной тригонометрической функции находить значение другой функции с использованием основного тригонометрического тождества.

Задание выполняется на уровне 25,2/96,7%. Проблемы у участников обычно возникают при выполнении арифметических действий и определении знака тригонометрической функции.

Задание 10.

В ходе распада радиоактивного изотопа его масса m *(в мг) уменьшается по закону* $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{\tau}{T}}$*, где* m_0 *— начальная масса изотопа (в мг),* τ *— время, прошедшее от начального момента, в минутах,* T *— период полураспада в минутах. В начальный момент времени масса изотопа — 156 мг. Период его полураспада составляет 8 минут. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 39 мг.*

Задание проверяет сформированность умения использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, в частности – применять готовую формулу в расчетах. Помимо прямого применения формулы, требуется решить простейшее показательное уравнение .

Задание выполняется на уровне 32,7/98,3%. При решении этой задачи проблемы у участников чаще всего возникают на этапе чтения условия задачи или при подстановке данных в формулу.

Задание 11.

Пристани A и B расположены на озере, расстояние между ними равно 264 км. Баржа отправилась с постоянной скоростью из A в B. На следующий день после прибытия она отправилась тем же путём обратно со скоростью на 2 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на 1 час. В результате она затратила на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость баржи на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

Задание проверяет сформированность умения использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни. Для выполнения этого задания нужно уметь решать текстовую задачу на движение.

Задание выполняется на уровне 21,5/95,0%.

Задание 12.

Найдите точку минимума функции $y = 5x - \ln(x+3)^5 + 6$.

Задание проверяет сформированность умения использовать производную для исследования функции. Для выполнения этого задания нужно знать связь производной со свойствами функции и уметь находить производную функции.

Задание выполняется на уровне 8,8/85,0%.

Задание 13.

а) Решите уравнение $2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos(\pi - x) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Задание проверяет сформированность умений решать тригонометрическое уравнение и отбирать корни, принадлежащие числовому отрезку. Задание выполняется на уровне 0,2/94,4%.

Это задание решают выпускники с отличной и хорошей подготовкой, выпускники со слабой подготовкой к этому заданию, как правило, не приступают.

Задание 15.

Решите неравенство $x^2 \log_{512}(x+7) \le \log_2\left(x^2+14x+49\right)$.

Задание проверяет сформированность умения решать неравенства.

Это задание решают выпускники с отличной и хорошей подготовкой, выпускники со слабой подготовкой к этому заданию, как правило, не приступают.

Низкий процент выполнения задания 15 свидетельствует о существующей проблеме – массовом отсутствии у у выпускников средней школы умения решать неравенства вообще (не только логарифмические). Основанием для такого вывода является характер типичных ошибок, допущенных в решении квадратных, дробно-рациональных неравенств и систем линейных неравенств, а также при применении метода интервалов.

Задание 17.

В июле 2026 года Иванов планирует взять кредит на пять лет в размере 1050 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остаётся равным 1050 тыс. рублей;
— выплаты в 2030 и 2031 годах равны;
— к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью.
На сколько рублей последняя выплата будет больше первой?

Задание проверяет сформированность умения использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни. Для выполнения этого задания нужно составить математическую модель по тексту задачи. Задание выполняется на уровне 0,03/89,7%.

Алгебра и начала анализа, высокий уровень сложности

К заданиям высокого уровня сложности относятся задания 18 и 19.

Задание 18.

Найдите все значения a, *при каждом из которых система уравнений*

$$\begin{cases} \sqrt{36-y^2} = \sqrt{36-a^2x^2}, \\ x^2+y^2 = 2x+6y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Задание проверяет сформированность умений комбинировать различные изученные алгоритмы для решения задач, использовать различные методы, включая графические. Для решения задачи необходимы развитая математическая культура, умение проводить исследование системы уравнений на совместность и количество решений. Задание выполняется на уровне 0,0/27,9%.

Задание 19.

На доске написано несколько различных натуральных чисел, в записи которых могут быть только цифры 4 и 9 (возможно, только одна из этих цифр).
а) Может ли сумма этих чисел быть равна 107?
б) Может ли сумма этих чисел быть равна 289?
в) Какое наименьшее количество чисел может быть на доске, если их сумма равна 3986?

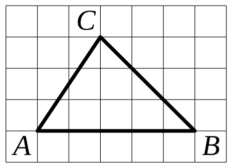
Задание проверяет сформированность умения применять математические знания для решения задач. Задание выполняется на уровне 0,9/38,6%. Показатели выполнения данного задания существенно выросли, показывая рост логической культуры выпускников.

Геометрия, базовый уровень сложности

Задания 3, 6, 8 относятся к заданиям базового уровня и выполняются значительно хуже алгебраических заданий базового уровня.

Задание 3.

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 *изображён треугольник* ABC. *Найдите длину его средней линии, параллельной стороне* AB.

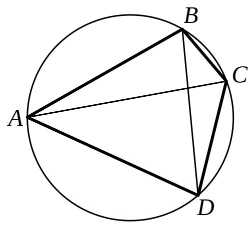


Задание проверяет сформированность умения выполнять действия с геометрическими фигурами. Для выполнения задания требуется знание свойства средней линии треугольника и умение найти нужные элементы на чертеже.

Задание выполняется на уровне 75,7/98,5%.

Задание 6.

Четырёхугольник $ABCD$ *вписан в окружность. Угол* ABD *равен* $58°$, *угол* CAD *равен* $39°$. *Найдите угол* ABC. *Ответ дайте в градусах.*

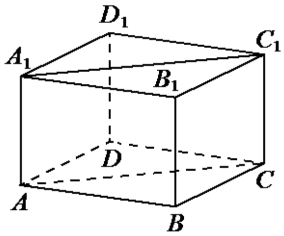


Задание проверяет сформированность умения выполнять действия с геометрическими фигурами. Для выполнения задания требуется знание свойства вписанных углов и свойства вписанного четырёхугольника.

Задание выполняется на уровне 32,1/93,6%.

Задание 8.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *известно, что* $AB=7$, $BC=6$, $AA_1=5$. *Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки* A, B, C, A_1, B_1, C_1.



Задание проверяет сформированность умения находить на чертеже элементы многогранника, пространственное видение и пространственное мышление Для выполнения задания требуется умение находить объёмы призмы.

Задание выполняется на уровне 40,7/97,7%.

Геометрия, повышенный уровень сложности

Задания 14 и 16 относятся к повышенному уровню сложности. Эти задания решают в основном участники ЕГЭ, претендующие на высокий балл. Успешное выполнение этих заданий возможно только при систематическом изучении курса геометрии. Натаскивания на задания, встречавшиеся в прошлые годы, чем грешат многие учителя при подготовке к ЕГЭ, недостаточно. После такой «подготовки» старшеклассник, наученный решать прошлогодние задачи, встречается с задачей, которую он прежде не решал, и не может подойти к ней, поскольку у него отсутствуют навыки анализа условия и геометрической конфигурации, поиска и синтеза решения. Вместо этих важнейших навыков он имеет лишь навык узнавания знакомой задачи и следования заученному алгоритму.

Задание 14.
В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $\sqrt{21}$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = 4$, $SK : KB = 1:3$.
а) Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC.
б) Найдите объём пирамиды $BCKM$.

Задание 16.
В прямоугольном треугольнике ABC точка M лежит на катете AC, а точка N лежит на продолжении катета BC за точку C, причём $CM = BC$ и $CN = AC$.
а) Отрезки CP и CQ — медианы треугольников ABC и NCM соответственно. Докажите, что прямые CP и CQ перпендикулярны.
б) Прямые MN и AB пересекаются в точке K, а прямые BM и AN — в точке L. Найдите KL, если $BC = 1$, а $AC = 5$.

Геометрическая задача 14 (стереометрия) повышенного уровня сложности имеет низкий процент выполнения (средний процент выполнения – 2,5), что свидетельствует о несформированности у большинства выпускников умения строить изображения многогранников и сечения многогранников плоскостями, комбинировать различные методы решения задач с использованием свойств фигур, пользоваться векторами и координатами для решения задач. Особо следует отметить массовые логические ошибки при доказательстве геометрических фактов. Методика обучения старшеклассников решению стереометрических задач должна меняться за счет более широкого использования задач на построение, на доказательство на основе уверенного владения материалом курса планиметрии.

Средний процент решения задачи 16 по планиметрии (3,8) несколько выше, чем у стереометрической задачи 14. Наличие в части 2 профильного ЕГЭ задачи по геометрии повышенного уровня сложности и преемственность в геометрических частях ОГЭ и ЕГЭ привели к наметившемуся росту результатов выполнения планиметрической задачи на 16 линии профильного ЕГЭ.

Тем не менее, задачи 14 и 16 по геометрии до сих пор решают только наиболее подготовленные участники. У большинства участников экзамена трудности начинаются уже при построении и чтении чертежа: слабо развиты навыки поиска соотношений между элементами чертежа, школьники очень часто совершают ошибки в решении прямоугольных треугольников, отсутствуют необходимые навыки поиска нужных дополнительных построений.

Низкий процент выполнения геометрических заданий свидетельствует о сохраняющихся системных недостатках в преподавании геометрии. Одна из причин, как уже отмечалось, – рассмотрение лишь тех типов задач, которые встречались на экзамене в предыдущие годы, вместо полноценного изучения геометрии.

Рассмотрим выполнение экзаменационной работы ЕГЭ 2020 г. участниками с различным уровнем математической подготовки.

Традиционно по результатам ЕГЭ по математике участники условно разбиваются на пять групп: группа участников с минимальной подготовкой, две подгруппы с базовой подготовкой, группы с повышенным и с высоким уровнями подготовки. Границы групп определяются на основе оценки соответствия выполнения экзаменационной работы требованиям вузов Численность групп, выявленных в 2020 г., показана в таблице 2 .

Таблица 2. Группы по уровню подготовки (профильный уровень)

Группа	Группа 1 (балансирующие на грани преодоления минимального балла)	Группа 2 (базовый 1)	Группа 3 (базовый 2)	Группа 4 (повыш.)	Группа 5 (высокий)
Границы первичных баллов	0–6	7–10	11–13	14–22	23–32
Границы тестовых баллов	0–27	33–50	56–68	70–86	88–100
Численность группы в 2020 г. (тыс. человек / %)	53,5/14,7	120,7/33,1	78,4/21,5	103,6/28,4	8,2/2,3

Численность группы 1 выросла по сравнению с предыдущим годом, приблизившись к показателю 2018 г. Кроме психологических факторов, связанных с особенностями регламента ЕГЭ в условиях пандемии, на результатах до сих пор сказывается сохраняющееся еще в ряде регионов немотивированное давление школ на выпускников, приводящее к выбору профильного уровня недостаточно подготовленными выпускниками. Эти участники не могут рассчитывать на успешный результат на профильном экзамене. Следовательно, их участие в профильном экзамене – недоработка школ, не сумевших верно сориентировать этих выпускников. Большинство из тех, кто не сдал профильный экзамен или набрал ровно 6 первичных баллов, скорее всего, успешно сдало бы экзамен на базовом уровне. Справедливости ради отметим, что с каждым годом это негативное явление сказывается все слабее: как отмечалось выше, выбор экзамена становится все более осознанным и соответствующим образовательным запросам школьников.

Участники ЕГЭ, балансирующие на грани преодоления минимального балла, как правило, ограничиваются решением 10 – 12 заданий с кратким ответом и не приступают к задачам, требующим развернутых ответов. В большинстве своем это школьники, слабо мотивированные к изучению математики. Задачи по геометрии и на понимание объектов и методов математического анализа выполняются данной группой участников крайне плохо.

Группа 2 по сравнению с 2019 г. незначительно уменьшилась. Участников ЕГЭ из этой группы можно охарактеризовать как тех, кто освоил базовый курс, но не приобрел устойчивых навыков, что затрудняет для них продолжение образования по технической специальности. В отличие от участников из группы 1, участники из группы 2 часто пытаются решить задания части 2, о чем свидетельствуют, например, результаты решения тригонометрического уравнения. Наличие базовых математических навыков позволяет им относительно успешно справиться с частью 1 экзамена, что показывает их потенциал, но при этом, начиная с задания 14, их результаты мало отличаются от результатов группы 1.

Группы 3–5 сократились по сравнению с 2019 г., но по-прежнему их численность выше, чем в 2018 г. Это означает, что, несмотря на объективно негативные факторы, повлиявшие на результаты экзамена в 2020 г., математическая подготовка выпускников выше, чем в период с 2015 по 2018 г.

Группа 3 представлена участниками экзамена, успешно освоившими базовый курс математики и способными обучаться на технических специальностях большинства вузов, не предъявляющих очень высоких требований к математическим знаниям студентов. Эта группа участников выполняет задания 1–13 и 15, как правило, с небольшим количеством ошибок вычислительного характера.

Группа 4 – выпускники, имеющие уровень математической подготовки, достаточный для продолжения образования по большинству специальностей, требующих повышенной и высокой математической компетентности. В этом году, как и в прошлом, эта группа превысила по численности группу 3.

Группа 5 численно уменьшилась по сравнению с 2019 г. Это выпускники, имеющие уровень подготовки, достаточный для продолжения обучения с самыми высокими требованиями к математической подготовке на технических, а также на фундаментальных естественнонаучных и математических специальностях вузов. Но даже в этой, наиболее подготовленной, группе по-прежнему требуется внимание к повышению качества геометрической подготовки.

Для анализа и выработки рекомендаций отобраны задания, при выполнении которых участниками ЕГЭ 2020 г. были допущены типичные ошибки, доля которых статистически значима. В анализ также включены задания, при выполнении которых наблюдалась статистически значимая частота отсутствия ответа, а также задания, где проявившаяся ошибка была не очень массовой, но свидетельствовала о вероятных серьезных упущениях в методике преподавания математики.

Задание 1.

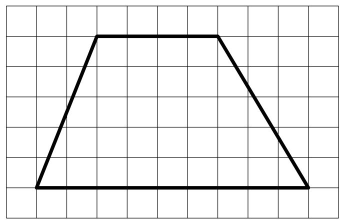
Пример 1. *В доме, в котором живёт Таня, 9 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже в каждом подъезде находится по 8 квартир. Таня живёт в квартире 252. В каком подъезде живёт Таня?*

Пример 2. *В пачке 250 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 700 листов. Какого наименьшего количества пачек бумаги хватит на 8 недель?*

Комментарий. Неверный ответ 3 в примере 1 мог получиться при делении 252 на 72 и округлении до целого без учета реальной ситуации. Неверный ответ 24 в примере 2 мог получиться, если не вычисляли, а прикидывали «на глаз».

Рекомендация. Включать задание практического содержания в аудиторную и домашнюю работы.

Задание 3. *На клетчатой бумаге с размером клетки* 1×1 *изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.*



Комментарий. Неверный ответ 4,5 мог получиться при делении длины большего основания на 2, как при нахождении средней линии треугольника, – неверное прочтение условия задачи. Неверный ответ 32,5 получается, если вычислять площадь трапеции.

Рекомендации. Давать задания по одному рисунку с разными вопросами, включать задания в аудиторную и домашнюю работы.

Задание 4.

Пример 1. *На чемпионате по прыжкам в воду выступают 70 спортсменов, среди них 6 прыгунов из Польши и 7 прыгунов из Чехии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что четвёртым будет выступать прыгун из Чехии.*

Пример 2. *В группе туристов 5 человек. С помощью жребия они выбирают трёх человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?*

Комментарий. Неверный ответ 0,4 в примере 1 мог получиться при непонимании, что выступление прыгуна из Чехии четвертым, пятым, десятым и проч. – это равновероятные события, и при этом на 4 не нужно ни делить, ни умножать. Неверный ответ 0,2 в примере 2 мог получиться, если найденную вероятность еще поделить на число людей в группе.

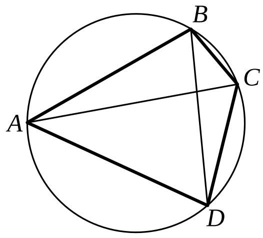
Рекомендация. Включать задание практического содержания в аудиторную и домашнюю работу.

Задание 5. *Найдите корень уравнения* $2^{-4-x}=16$.

Комментарий. Неверный ответ 8 мог получиться в случае потери знака при решении линейного уравнения либо в случае неверного прочтения показателя исходного уравнения.

Рекомендации. Больше внимания обращать на проверку правильности решения уравнения, регулярно включать в классную и домашнюю работы уравнения в качестве задач на повторение и закрепление материала.

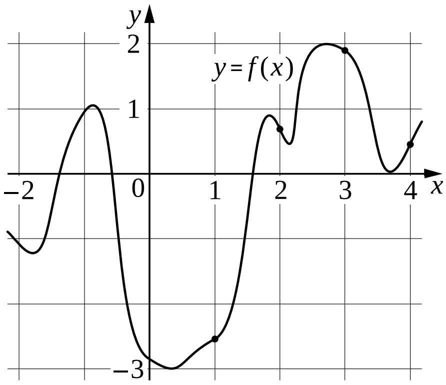
Задание 6. *Четырёхугольник* $ABCD$ *вписан в окружность. Угол* ABC *равен* $97°$*, угол* CAD *равен* $38°$. *Найдите угол* ABD. *Ответ дайте в градусах.*



Комментарий. Неверный ответ 45 мог получиться при глазомерной оценке величины угла либо при неверном прочтении чертежа, например, если участник экзамена расценил угол *ABC* как вписанный угол, опирающийся на диаметр.

Рекомендации. Предлагать задания с разными числовыми данными по одному рисунку, уделять больше внимания развитию умения верно пользоваться геометрическим чертежом.

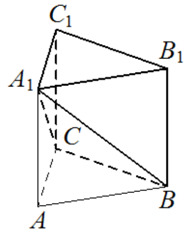
Задание 7. *На рисунке изображён график функции* $y=f(x)$. *На оси абсцисс отмечены точки 1, 2, 3, 4. В какой из этих точек значение производной функции* $f(x)$ *наименьшее? В ответе укажите эту точку.*



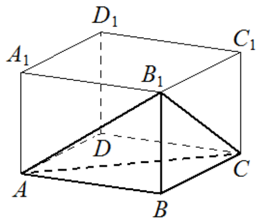
Комментарий. Неверный ответ 1 мог получиться при неверном понимании условия. Например, в случае, если участник нашел наименьшее значение функции, а не производной. Неверный ответ, вероятно, говорит о подготовке учащихся к решению только одного типа подобных задач, а именно тех, где нужно найти единственную точку, в которой производная отрицательна, а потому не было необходимости сравнивать отрицательные значения производной в разных точках.

Рекомендации. При изучении элементов анализа и при повторении обращать больше внимания на геометрический смысл производной; предлагать различные вопросы по графику функции и графику производной функции

Задание 8.



Пример 1. *Дана правильная треугольная призма* $ABCA_1B_1C_1$, *площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 6. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки* B, C, A_1, B_1, C_1.



Пример 2. *В прямоугольном параллелепипеде* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *известно, что* $AB=9$, $BC=7$, $AA_1=6$. *Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки* A, B, C, B_1.

Комментарий. Неверный ответ 12 в примере 1 мог получиться, если предположить, что объем названного многогранника равен половине объема данной призмы; неверный ответ 8 мог получиться, если участник нашел объем отсеченной пирамиды и забыл последним действием вычесть его из объема призмы; неверный ответ 24 мог получиться, если просто найти объем призмы при неверном понимании условия.

Неверный ответ 126 в примере 2 мог получиться, если участник разделил на 3 объем данной призмы, не учитывая, что основание пирамиды B_1ABC вдвое меньше основания призмы; неверный ответ 94,5 можно получить, если посчитать, что объем пирамиды равен четверти объема прямоугольного параллелепипеда. Эти типичные ошибки свидетельствуют о недостаточном развитии пространственного мышления и навыка использовать известные соотношения площадей и объемов, недостаточной сформированности навыков.

Рекомендация. Постоянно включать задания на соотношения частей фигуры по готовым чертежам в классную и домашнюю работы в качестве задач на повторение и закрепление навыков.

Задание 9.

Пример 1. *Найдите* $\operatorname{tg}\alpha$, *если* $\sin\alpha=\frac{\sqrt{26}}{26}$ *и* $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: 0,2.

Массовый неверный ответ: 1.

Пример 2. *Найдите значение выражения* $26\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{4\pi}{3}$.

Комментарий. Неверный ответ 1 в примере 1 мог получиться, если посчитать, что ситуация схожа с тем, что если $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, то и $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Неверный ответ 13 в примере 2 мог получиться, если «забыть» учесть знак «минус» у косинуса угла второй четверти.

Рекомендация. Включать различные тригонометрические задания в аудиторную и домашнюю работы.

Задание 10.

Пример 1. *В ходе распада радиоактивного изотопа его масса* m *(в мг) уменьшается по закону* $m=m_0\cdot 2^{-\frac{\tau}{T}}$, *где* m_0 *— начальная масса изотопа (в мг),* τ *— время, прошедшее от начального момента, в минутах,* T *— период полураспада в минутах. В начальный момент времени масса изотопа — 196 мг. Период его полураспада составляет 4 минуты. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 49 мг.*

Пример 2. *Водолазный колокол, содержащий* $\upsilon = 6$ *моль воздуха при давлении* $p_1 = 2{,}5$ *атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления* p_2 *(в атмосферах). Работа (в джоулях), совершаемая водой при сжатии воздуха, вычисляется по формуле*

$$A = \alpha\upsilon T \log_2 \frac{p_2}{p_1},$$

где $\alpha = 5{,}75$ *Дж/моль К — постоянная, T=300K — температура воздуха. Найдите, какое давление* p_2 *будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 10 350 Дж. Ответ дайте в атмосферах.*

Комментарий. Неверный ответ 2 в примере 1 мог получиться при неверном решении линейного уравнения $\frac{\tau}{4} = 2$. Неверный ответ 2,5 в примере 2 мог получиться, если в ответе указать не p_2, а p_1.

Рекомендации. На уроках следует больше внимания уделять приемам самопроверки, практические задания на вычисления по формулам постоянно включать в классную и домашнюю работы.

Задание 11.

Пример 1. *Расстояние между пристанями А и В равно 160 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через 1 час вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот проплыл 38 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.*

Массовый неверный ответ: 16. Многие не дали ответ.

Пример 2. *Моторная лодка прошла против течения реки 117 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.*

Массовый неверный ответ: 13. Многие не дали ответ.

Комментарий. Неверный ответ 16 в примере 1 мог получиться при неверном составлении уравнения.

Неверный ответ 13 в примере 2 мог получиться, если в ответе скорость лодки при движении по течению. Причина – неверное понимание условия, либо выписывание в ответ промежуточного результата.

Рекомендации. Учить приемам самопроверки, задания на решение текстовых задач включать в аудиторную и домашнюю работы.

Задание 12.

Найдите точку максимума функции $y = (4 - x) \cdot e^{x+4}$.

Комментарий. Неверный ответ 4 мог получиться, если посчитать, что наименьшее значение функции равно 0.

Рекомендация. Учить в полном объёме исследованию функции с помощью производной.

Результаты экзамена по математике позволили выявить ряд проблем, на которые необходимо перенести акцент в обучении математике. Уникальная в мировом масштабе открытость и прозрачность ЕГЭ в России, в частности наличие открытых банков заданий, позволили активно внедрить онлайн-тренажеры, которые позволили резко повысить эффективность итогового повторения и подготовки к экзамену с учетом индивидуальных образовательных траекторий каждого участника экзамена. Это могло обусловить снижение количества допущенных участниками ЕГЭ вычислительных ошибок при выполнении заданий с кратким ответом и ошибок, связанных с неправильным пониманием условия математической задачи. Вместе с тем следует отметить, что изучение математики в старшей школе должно строиться не только на наборе заданий открытого банка ЕГЭ.

Для успешного решения заданий с развернутым ответом необходимы не только хорошая математическая «база», но и умения проводить логические рассуждения, четко и грамотно излагать свои мысли. Для формирования этих умений необходим квалифицированный учитель; такую подготовку невозможно осуществлять в режиме тренажера. Хорошо заметны успехи выпускников образовательных организаций в тех регионов, в которых уделяется большое внимание сопровождению процесса обучения адресным повышением квалификации и методической поддержкой учителя.

Повышение успешности решения типовых геометрических задач возможно при включении в процесс обучения задач, развивающих геометрическое зрение и геометрическую интуицию. Для этого необходимо перенести акцент в преподавании геометрии в основной и старшей школе с заучивания определений и решения большого количества технических задач на решение содержательных задач, где требуется анализ геометрических конфигураций, дополнительные построения, комбинированное применение изученных теорем.

В 2021 г. изменения в структуре и содержании КИМ ЕГЭ по математике профильного и базового уровней не планируются.

Методическую помощь учителям и обучающимся при подготовке к ЕГЭ могут оказать материалы, размещенные на сайте ФИПИ (www.fipi.ru):

- документы, определяющие структуру и содержание КИМ ЕГЭ 2021 г.;
- открытый банк заданий ЕГЭ;
- учебно-методические материалы для председателей и членов региональных предметных комиссий по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ;
- методические рекомендации на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ прошлых лет (2015–2019 гг.);
- журнал «Педагогические измерения»;

Youtube-канал Рособрнадзора (видеоконсультации по подготовке к ЕГЭ 2016 – 2020 гг.), материалы сайта ФИПИ (http://fipi.ru/ege-i-gve-11/daydzhest-ege).

Приложение

Основные характеристики экзаменационной работы ЕГЭ 2020 г. по математике

Анализ надежности экзаменационных вариантов по математике (профильный уровень) подтверждает, что качество разработанных КИМ соответствует требованиям, предъявляемым к стандартизированным тестам учебных достижений. Средняя надежность (коэффициент альфа Кронбаха) КИМ по математике (профильный уровень) – 0,81.

№	Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований к уровню подготовки (по кодификатору)	Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору)	Уровень сложности задания	Максимальный балл за выполнение задания	Средний процент выполнения
1	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.1	1.1.1, 1.1.3, 2.1.12	Б	1	88,9
2	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	3.1, 6.2	3.1–3.3, 6.2.1	Б	1	98,4
3	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.1	5.1, 5.5	Б	1	89,8
4	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.4	6.3	Б	1	89,9
5	Уметь решать уравнения и неравенства	2.1	2.1	Б	1	96,1
6	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.1, 5.2	5.1.1–5.1.4, 5.5.1–5.5.5	Б	1	76,8
7	Уметь выполнять действия с функциями	3.1–3.3	4.1–4.3	Б	1	63,0
8	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.2	5.2–5.5	Б	1	63,8
9	Уметь выполнять вычисления и преобразования	1.1–1.3	1.1–1.4	П	1	65,2
10	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.1–6.3	2.1, 2.2	П	1	75,7
11	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.1	2.1, 2.2	П	1	57,0
12	Уметь выполнять действия с функциями	3.2, 3.3	4.1, 4.2	П	1	47,9
13	Уметь решать уравнения и неравенства	2.1–2.3	2.1, 2.2	П	2	34,9
14	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.2, 4.3, 5.2, 5.3	5.2–5.6	П	2	2,5
15	Уметь решать уравнения и неравенства	2.3	2.1, 2.2	П	2	14,8
16	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.1, 5.2, 5.3	5.1	П	3	3,8
17	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.1, 6.3	1.1.1, 1.1.3, 2.1.12	П	3	22,0
18	Уметь решать уравнения и неравенства	2.1–2.3, 5.1	2.1, 2.2, 3.2, 3.3	В	4	2,4
19	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.1, 5.3	1.1–1.4	В	4	10,3